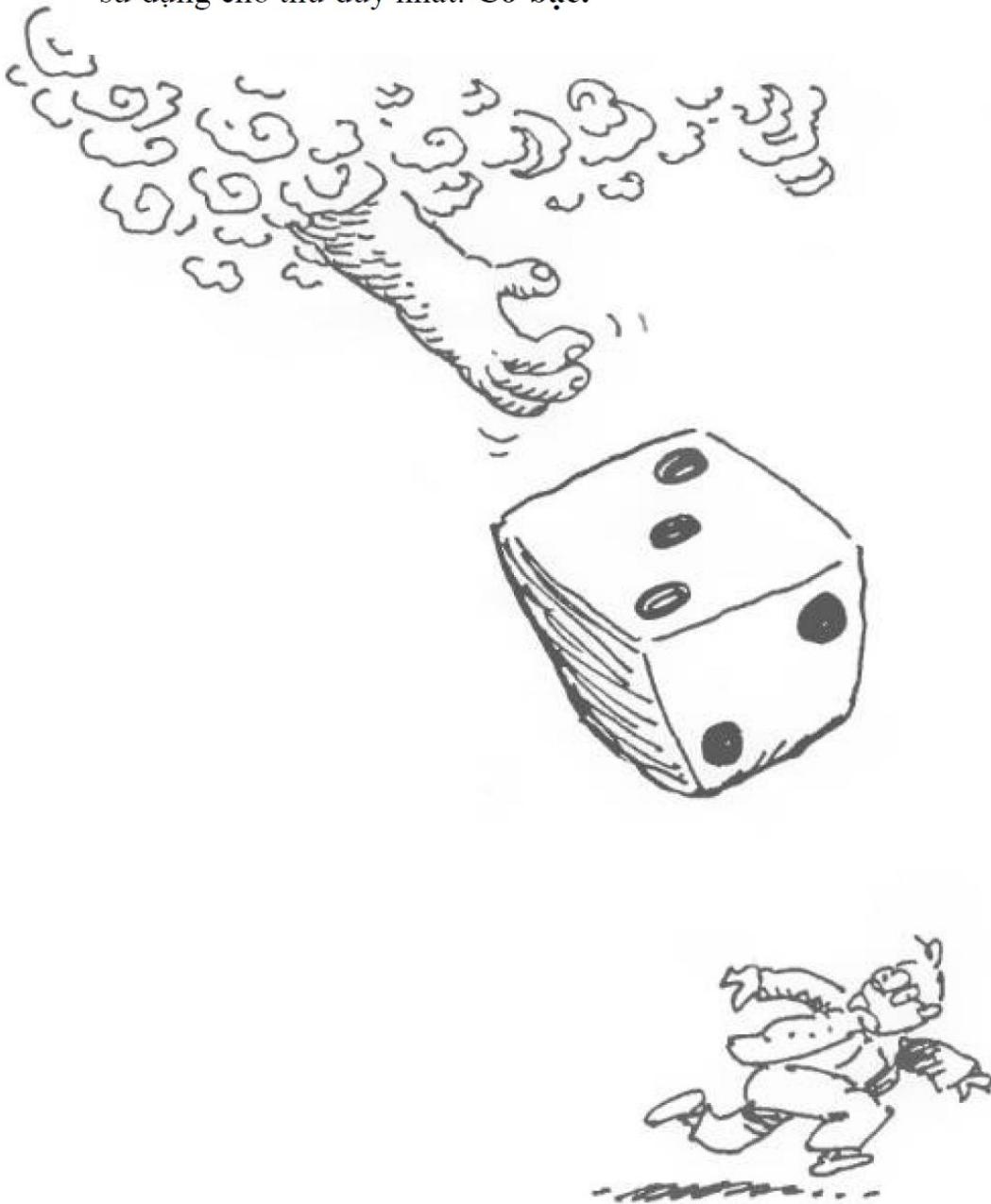


CHƯƠNG 3: XÁC SUẤT

Không có gì trong cuộc sống là tuyệt đối. Trong mọi việc làm, chúng ta đều đánh giá cơ hội các khả năng thành công, từ lĩnh vực kinh doanh, y học cho đến lĩnh vực thời tiết... Nhưng đa số trong lịch sử nhân loại, xác suất, nghiên cứu chính thức các quy luật cơ hội, đã được sử dụng cho thứ duy nhất: **Cờ bạc.**



Không ai biết cờ bạc có từ bao giờ. Nó xuất hiện sớm nhất từ thời Ai Cập cổ đại, khi nam giới và phụ nữ biết sử dụng một thứ có bốn mặt làm từ xương động vật được gọi là "astragali" để chơi.

Nếu ta chết hãy chôn ta cùng "astragali"..., ta muốn đánh bạc với thần chết!



Hoàng đế La mã Claudius đã viết ra những hiểu biết đầu tiên về cờ bạc. Nhưng thật không may, cuốn sách "làm thế nào để thắng xúc xắc" đã bị mất.

Quy tắc 1: hãy để hoàng đế La mã thắng 4 trong tổng số 5 lượt chơi!



Trò chơi xúc xắc hiện đại đã phổ biến từ thời trung cổ, vào thời Renais - Sance, hiệp sĩ Chevalier De Mere đã đưa ra một bài toán khó:

Nên chọn cái nào đây?
Hoặc là lăn được ít nhất 1 mặt 6 chấm trong 4 lần gieo con xúc xắc đơn, hoặc là lăn được ít nhất 2 mặt 6 chấm trong 24 lần gieo một cặp xúc xắc?



Hiệp sĩ đã giải thích rằng lượng trung bình số lượt thành công của các lần lăn là như nhau trong cả hai canh bạc:

Cơ hội được mặt sáu chấm = $1/6$

Số lượng trung bình trong 4 lần lăn = $4 * 1/6 = 2/3$

Cơ hội được 2 mặt 6 chấm trong một lần lăn = $1/36$

Số lượng trung bình trong 24 lần lăn = $24 * 1/36 = 2/3$

Tại sao sau đó, ở canh bạc thứ hai ông ta lại bị mất thường xuyên hơn???



De Mere đã đặt câu hỏi cho bạn bè của mình, Genius Blaise Pascal (1623-1666).

Cuối cùng, vấn đề đó giúp tôi trở lại chính mình!



Mặc dù Pascal trước đó đã từ bỏ niềm đam mê dục vọng là toán học(!), nhưng ông đã đồng ý giải quyết vấn đề của De Mere.

Pascal đã viết cho người bạn Genius Pierre De Fermat của mình, và với vài dòng thư, cả hai cùng vạch ra lý thuyết về xác suất theo hình thức hiện đại - dĩ nhiên bằng hình minh họa.

“Thưa ngài Pierre, đây quả thật là một học thuyết tuyệt vời mà ta có thể có được nếu một trong số chúng ta có thể đưa ra...”



Các khái niệm cơ bản

Giống như người đánh bạc chơi trò chơi, thì chúng tôi chơi vì khoa học, để quan sát kết quả:

Phép thử ngẫu nhiên

Là quá trình quan sát các kết quả của một biến cố cơ hội.

Các kết quả có thể có

Là tất cả các kết quả có thể của phép thử ngẫu nhiên.

Không gian mẫu

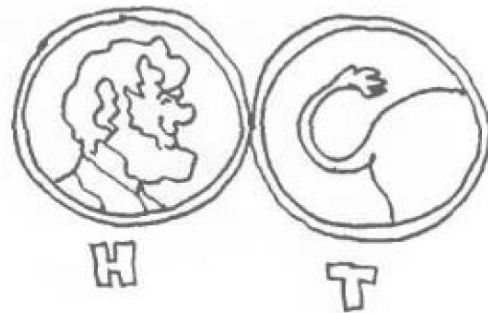
Là tập hợp hoặc bộ sưu tập của tất cả các kết quả có thể có.



Chẳng hạn nếu phép thử là tung một đồng xu, thì phép thử ngẫu nhiên bao gồm việc ghi chép các kết quả của biến cố...



Kết quả cơ bản là các mặt sấp và mặt ngửa...



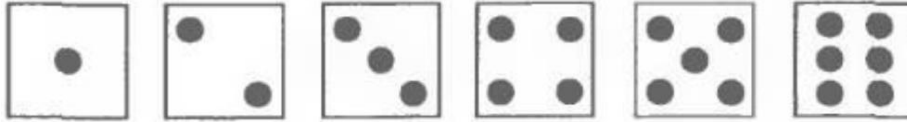
Không gian mẫu là một tập hợp được viết như sau:



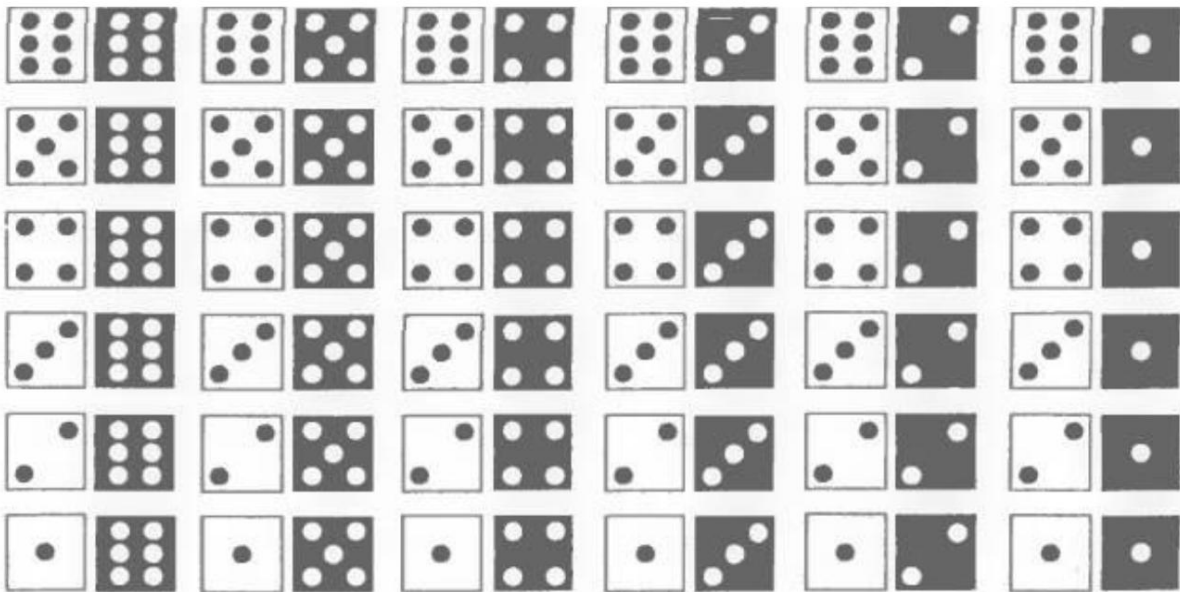
Còn bạn, nếu xúc xắc là trò chơi của bạn thì sao?



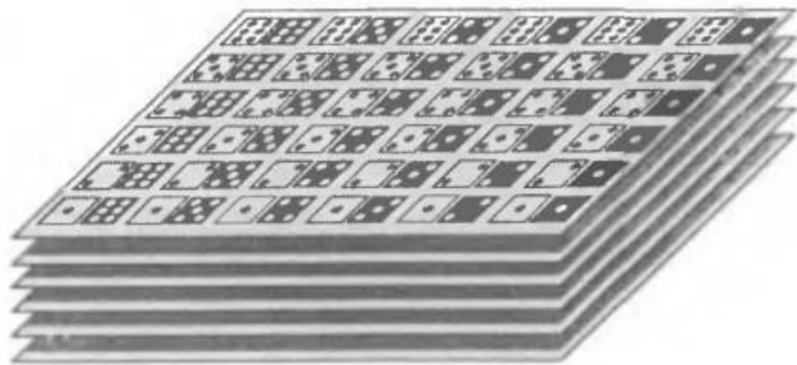
Không gian mẫu của việc tung một đồng xu thì lớn hơn chút.



Với một cặp xúc xắc, không gian mẫu như sau (chúng tôi thực hiện một con xúc xắc trắng và một con xúc xắc đen để phân biệt chúng):



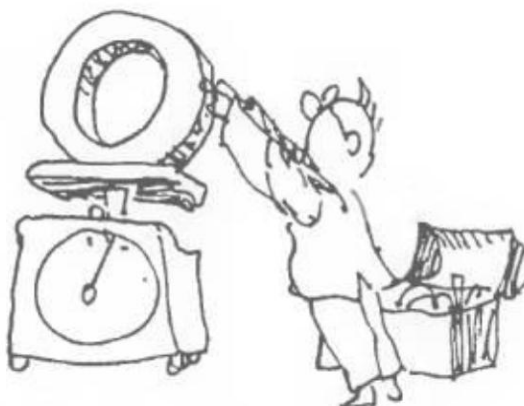
Không gian mẫu này có 36 (6x6) kết quả cơ bản. Với 3 con xúc xắc, không gian sẽ có 216 mục, như 6x6x6 chồng bên cạnh. Vậy với 4 con xúc xắc thì sao?



Vậy là đủ!

Tới một lúc nào đó, chúng ta phải dừng việc liệt kê, và bắt đầu suy nghĩ...

Bây giờ chúng ta hãy tưởng tượng một thí nghiệm ngẫu nhiên với n kết quả cơ bản O_1, O_2, \dots, O_n . Chúng tôi muốn gán một trọng lượng, hay một xác suất, tương ứng với mỗi kết quả, đo lường sự phù hợp của những điều xuất hiện. Ta viết xác suất của O_i như sau: $P(O_i)$



Ví dụ, trong lần tung đồng xu tung công bằng, khả năng xuất hiện mặt ngửa và mặt sấp là như nhau, và chúng tôi gán cho cả hai xác suất bằng 0.5.



$$P(H) = P(T) = .5$$

Mỗi kết quả xuất hiện một nửa số lần. Không tin cứ hỏi bất kỳ cầu thủ bóng đá nào mà xem!

Lăn hai con xúc xắc, có 36 kết quả cơ bản, tất cả có cùng khả năng, vì vậy xác suất của từng kết quả là $1/36$.

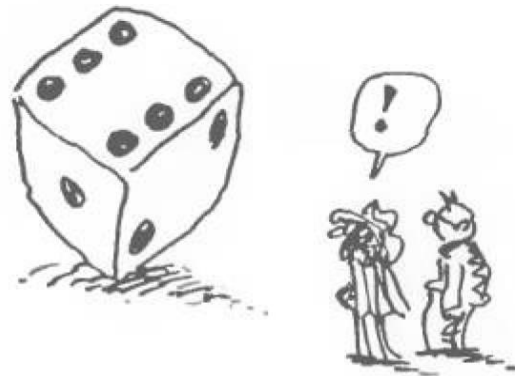
Ví dụ:

$$P(5 \text{ đen}, 2 \text{ trắng}) = 1/36$$

Có nghĩa là: nếu bạn gieo xúc xắc rất nhiều lần, trong thời gian dài, kết quả xảy ra sẽ là $1/36$ số lần gieo.



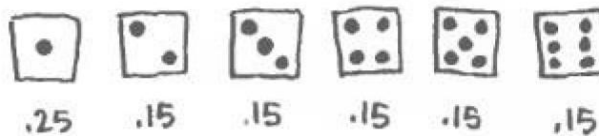
Điều gì xảy ra nếu người chơi bạc của chúng ta gian lận và tung một con xúc xắc nặng hơn? Mục đích của sự tranh cãi chỉ ra rằng, giả sử một kết quả xuất hiện tới 25% các lần gieo (trong dài hạn).



Không gian mẫu giống như một con xúc xắc công bằng.

{1, 2, 3, 4, 5, 6}

Nhưng xác suất lại khác nhau. Giờ thì ta có $P(1) = 0.25$ và xác suất các khả năng còn lại là 0.75. Nếu biến cố xuất hiện mặt 2,3,4,5,6 chấm đồng khả năng thì mỗi biến cố sẽ có xác suất là: $0.15 = 1/5(0.75)$



Tôi có thể làm việc với chúng!



Nhìn chung, các kết quả cơ bản không nhất thiết cần phải có xác suất bằng nhau.

Dự báo khả năng có mưa tuyết là 20%...



Thế thì khả năng mình được đi bộ chắc chỉ còn 5%...



Bây giờ chúng ta có thể nói gì về xác suất $P(O_i)$ trong một thí nghiệm ngẫu nhiên? Đầu tiên là:

$$P(O_i) \geq 0$$

Xác suất không bao giờ âm. Một xác suất bằng không có nghĩa là sự kiện đó không thể xảy ra. Nhỏ hơn không sẽ là vô nghĩa.



Thứ hai, nếu một sự kiện chắc chắn sẽ xảy ra, chúng ta gán cho nó xác suất bằng 1 (trong thời gian dài, đó là phần trăm số lần nó xảy ra!)



Đặc biệt, tổng xác suất của không gian mẫu phải bằng 1.

Nếu chúng ta làm thí nghiệm, một vài điều nhất định sẽ xảy ra!



Đặt hai tính chất này cùng nhau, và bạn đã có các tính chất đặc trưng của xác suất:

$$P(O_i) \geq 0$$

$$P(O_1) + P(O_2) + \dots + P(O_n) = 1$$

Xác suất thì không âm
Tổng xác suất của tất cả các kết quả cơ bản bằng 1.

...Nhưng nếu áo của mình là vật siêu hình thì....



Như một chính trị gia thông minh, chúng tôi đã tránh một số câu hỏi khó chịu, chẳng hạn như:

- A) Xác suất có nghĩa là gì?
- B) Làm thế nào để chúng ta gán xác suất cho kết quả?

Chúng ta hãy thảo luận về những điều dễ hơn, chẳng hạn vấn đề những lính bị gay trong quân đội...



Dưới đây là một số những điều chúng ta đã đạt được:

<p>Xác suất cổ điển: Dựa trên ý tưởng cò bạc, giả sử trò chơi công bằng và tất cả các kết quả cơ bản có cùng một xác suất.</p> <p>Tiến lên! Chúa cần một học thuyết mới!</p>	<p>Tần suất: Khi một thí nghiệm có thể được lặp đi lặp lại, thì xác suất của biến cố là tỷ lệ số lần biến cố xảy ra trong thời gian dài.</p>
<p>Xác suất chủ quan: Hầu hết các sự kiện của cuộc sống đều không lặp lại. Xác suất cá nhân là một đánh giá cá nhân khả năng của một kết quả. Nếu người cá cược tin rằng cơ hội chiến thắng trong cuộc đua của một chú ngựa lớn hơn 50%, thì người cá cược sẽ đặt cược vào con ngựa đó.</p> <p>Làm thế nào anh biết? Sự từng trải của tôi...</p>	<p>Người quan sát sử dụng định nghĩa cổ điển hoặc tần số của xác suất. Người cá cược hay Bayes cũng đều áp dụng các luật cơ hội chính thức cho các khả năng của mình.</p> <p>Làm thế nào để ngài biết được kết quả cơ bản mà không gieo xúc xắc cả triệu lần? Anh có muốn cá cược không?</p> <p>Người quan sát Bayes</p>

(Còn nữa)

Biên dịch: Minh Ánh và các nghiên cứu viên, Viện Khoa học Thống kê