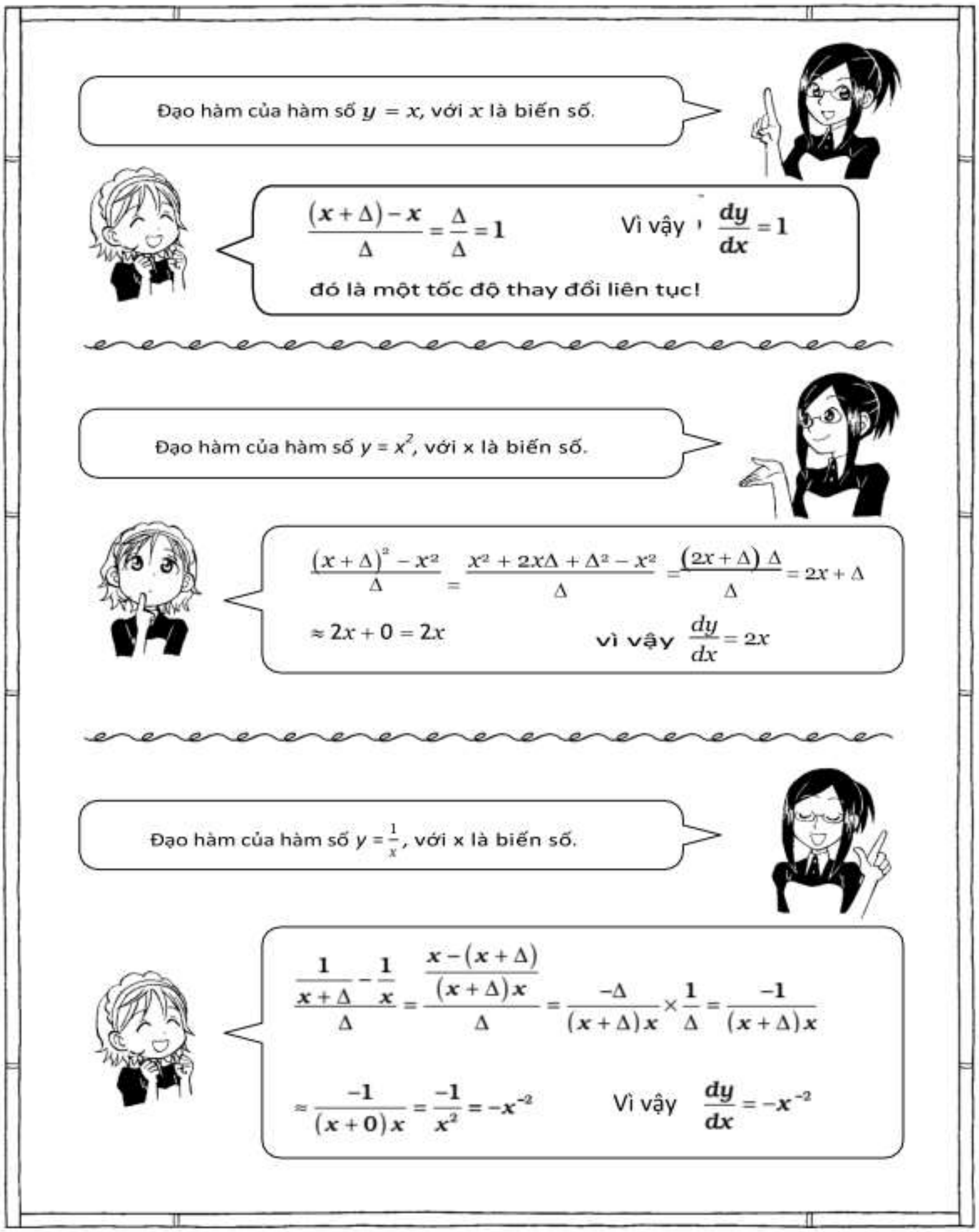
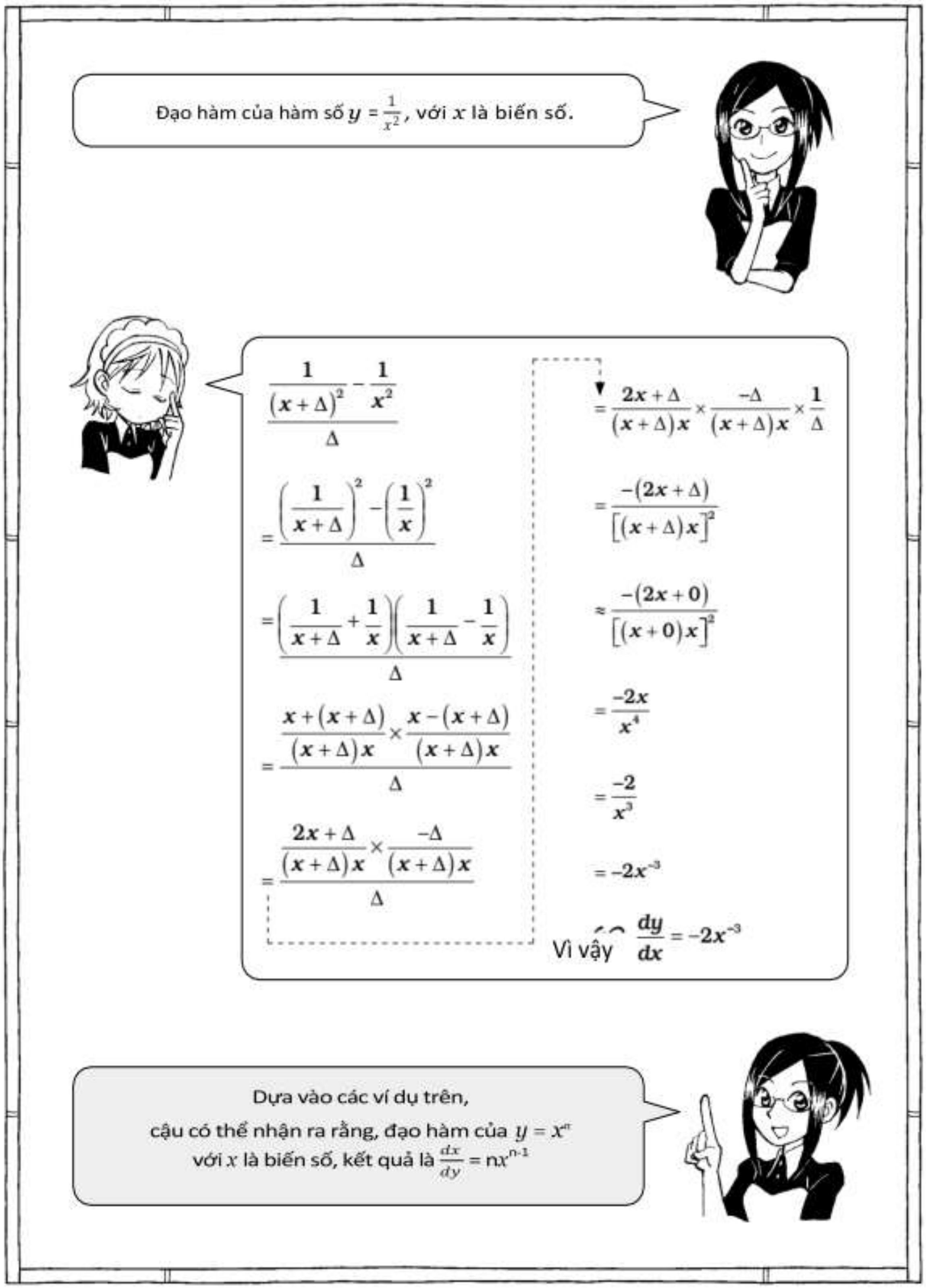
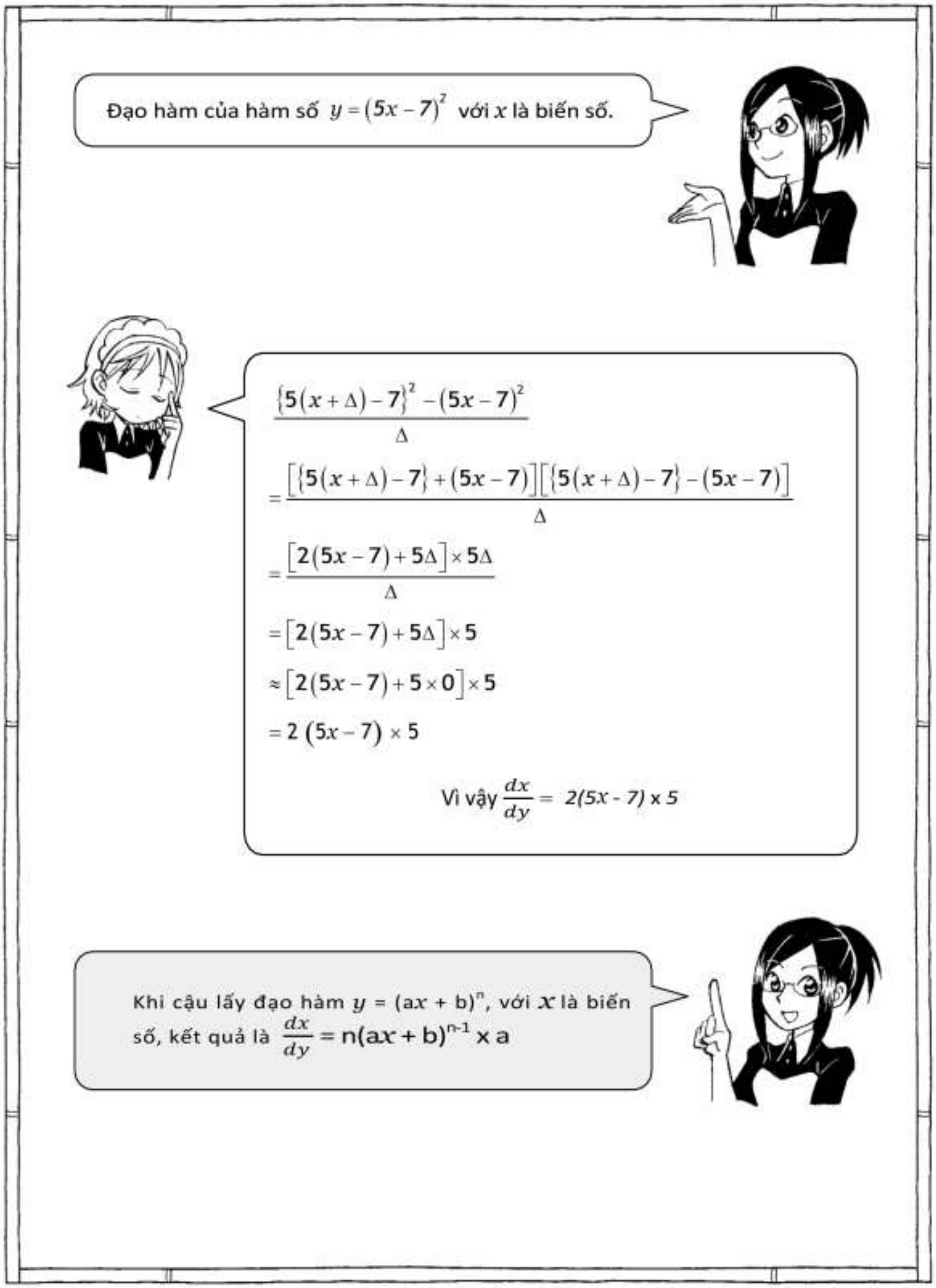
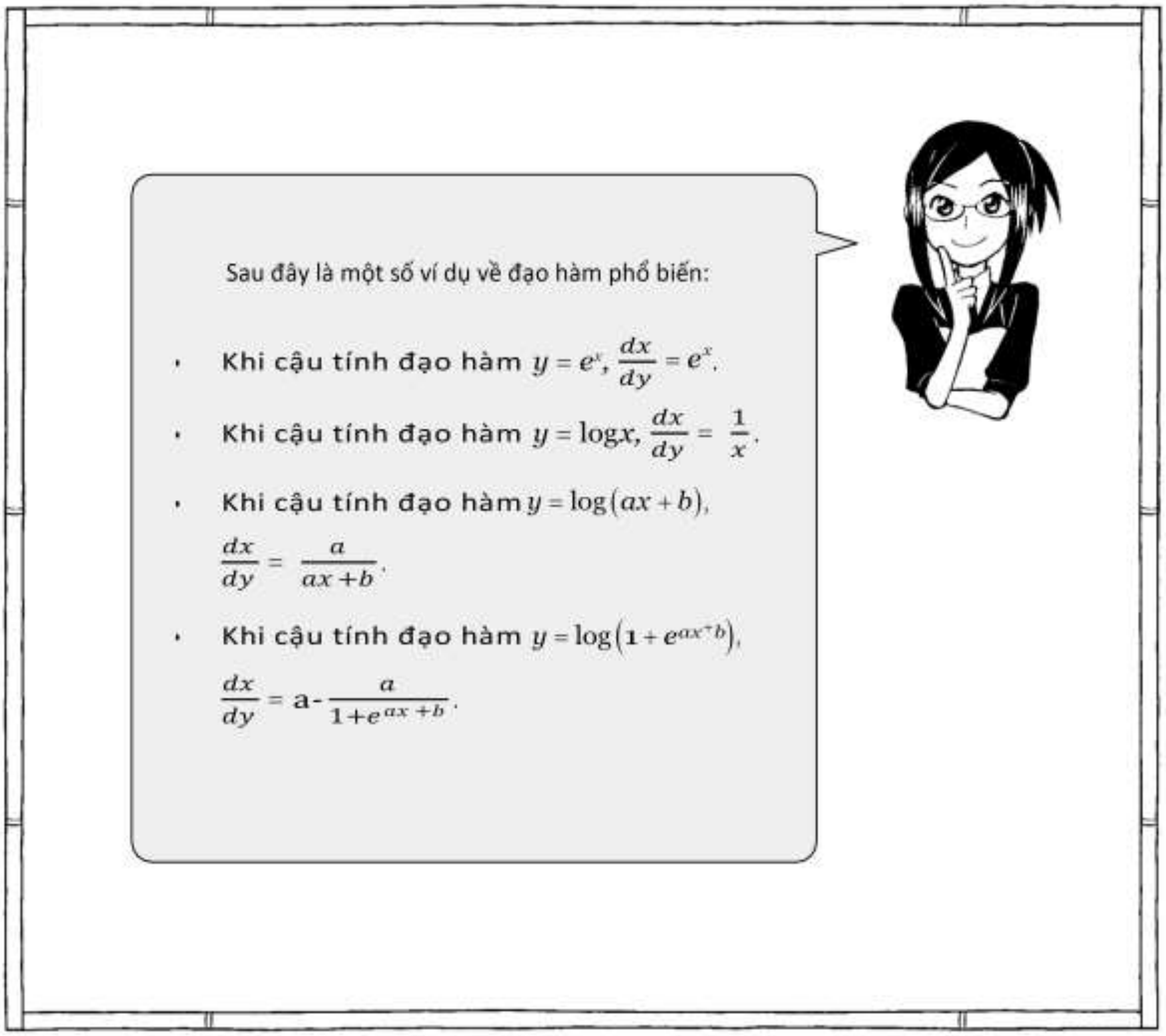
HỌC THỐNG KÊ QUA TRUYỆN TRANH




Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x^2}$, với x là biến số.
$\frac{\frac{1}{(x+\Delta)^2} - \frac{1}{x^2}}{\Delta} = \frac{\left(\frac{1}{x+\Delta}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}{\Delta} = \frac{\left(\frac{1}{x+\Delta} + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x+\Delta} - \frac{1}{x}\right)}{\Delta} = \frac{\frac{x+(x+\Delta)}{(x+\Delta)x} \times \frac{x-(x+\Delta)}{(x+\Delta)x}}{\Delta} = \frac{\frac{2x+\Delta}{(x+\Delta)x} \times \frac{-\Delta}{(x+\Delta)x}}{\Delta}$
$= \frac{2x+\Delta}{(x+\Delta)x} \times \frac{-\Delta}{(x+\Delta)x} \times \frac{1}{\Delta} = \frac{-(2x+\Delta)}{[(x+\Delta)x]^2} \approx \frac{-(2x+0)}{[(x+0)x]^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} = -2x^{-3}$
Vì vậy $\frac{dy}{dx} = -2x^{-3}$
Dựa vào các ví dụ trên,
cậu có thể nhận ra rằng, đạo hàm của $y = x^n$
với x là biến số, kết quả là $\frac{dx}{dy} = nx^{n-1}$


Đạo hàm của hàm số $y = (5x - 7)^2$ với x là biến số.
$\frac{\{5(x+\Delta)-7\}^2-(5x-7)^2}{\Delta}$
$= \frac{[\{5(x+\Delta)-7\}+(5x-7)][\{5(x+\Delta)-7\}-(5x-7)]}{\Delta}$
$= \frac{[2(5x-7)+5\Delta]\times 5\Delta}{\Delta}$
$= [2(5x-7)+5\Delta]\times 5$
$\approx [2(5x-7)+5\times 0]\times 5$
$= 2\,(5x-7)\times 5$
Vì vậy $\frac{dx}{dy} = 2(5x - 7) \times 5$
Khi cậu lấy đạo hàm $y = (ax + b)^n$, với x là biến số, kết quả là $\frac{dx}{dy} = n(ax + b)^{n-1} \times a$


Sau đây là một số ví dụ về đạo hàm phổ biến:
• Khi cậu tính đạo hàm $y = e^x$, $\frac{dx}{dy} = e^x$.
• Khi cậu tính đạo hàm $y = \log x$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{x}$.
• Khi cậu tính đạo hàm $y = \log(ax + b)$, $\frac{dx}{dy} = \frac{a}{ax+b}$.
• Khi cậu tính đạo hàm $y = \log\left(1 + e^{ax+b}\right)$, $\frac{dx}{dy} = a - \frac{a}{1+e^{ax+b}}$.


Vẫn tiếp tục chứ?
Tớ nghĩ thế!
Tuyệt!

Ma trận
行列*
Chủ đề cuối cùng chúng ta sẽ nghiên cứu tối nay là ma trận.
* Ma trận
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
1 2 3 4
1 2 3 4 5 6
...
1 2 3 4 5 6
1 2 3
Ma trận trông giống như các tòa nhà chung cư được tạo ra từ các con số.
Trông cậu có vẻ lo lắng. Hãy thư giãn đi!
Trong toán học, ma trận là một cách để tổ chức một mảng số hình chữ nhật. Bây giờ tôi sẽ xem xét các quy tắc cộng, nhân và nghịch đảo ma trận. Ghi chép cẩn thận nhé, được không?
Được.

Một ma trận có thể được sử dụng để viết các phương trình một cách nhanh chóng. Cũng như với số mũ, các nhà toán học có các quy tắc để viết chúng.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases} \text{ có thể được viết thành } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{và } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{cases} \text{ có thể được viết thành } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ví dụ

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = -3 \\ 4k_1 + 5k_2 + 6k_3 = 8 \\ 10k_1 + 11k_2 + 12k_3 = 2 \\ 13k_1 + 14k_2 + 15k_3 = 7 \end{cases} \text{ có thể được viết thành } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Nếu bạn không biết giá trị của biểu thức, bạn viết biểu thức và ma trận như thế này:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 \\ 4k_1 + 5k_2 + 6k_3 \\ 7k_1 + 8k_2 + 9k_3 \\ 10k_1 + 11k_2 + 12k_3 \\ 13k_1 + 14k_2 + 15k_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

Cũng giống như một bảng thông thường, chúng ta nói ma trận có *cột* và *hàng*. Mỗi số bên trong ma trận được gọi là một *phần tử*.

Tóm tắt

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases} \text{ có thể được viết thành } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q \end{cases} \text{ có thể được viết thành } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

Cộng ma trận

Tiếp theo tớ sẽ giải thích cho cậu cách cộng ma trận.

xem xét ví dụ này: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

giờ ta chỉ việc cộng các số có cùng vị trị lại với nhau: trên cùng bên trái cộng với trên cùng bên trái, tương tự lần lượt ...

$$\begin{pmatrix} 1+4 & 2+5 \\ 3+(-2) & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

cậu chỉ có thể cộng các ma trận có cùng kích thước, tức là cùng số hàng và cột.

Ví dụ vấn đề 1

$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$ thực hiện thế nào?

Trả lời

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+(-1) & 1+3 \\ 6+(-3) & (-9)+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ vấn đề 2

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & -4 \\ -7 & -3 & 10 \\ 8 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & -9 \end{pmatrix}$ thực hiện thế nào?

Trả lời

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\\13&14&15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&2&3\\-1&7&-4\\-7&-3&10\\8&2&-1\\7&1&-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+7&2+2&3+3\\4+(-1)&5+7&6+(-4)\\7+(-7)&8+(-3)&9+10\\10+8&11+2&12+(-1)\\13+7&14+1&15+(-9)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&4&6\\3&12&2\\0&5&19\\18&13&11\\20&15&6\end{pmatrix}$$

Tóm tắt

Đây là 2 ma trận có chung kích thước

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1q}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2q}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{p1}&a_{p2}&\cdots&a_{pq}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1q}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2q}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{p1}&b_{p2}&\cdots&b_{pq}\end{pmatrix}$$

Cậu có thể cộng chúng lại với nhau

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1q}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2q}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{p1}&a_{p2}&\cdots&a_{pq}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1q}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2q}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{p1}&b_{p2}&\cdots&b_{pq}\end{pmatrix}$$

như này:

$$\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1q}+b_{1q}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2q}+b_{2q}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{p1}+b_{p1}&a_{p2}+b_{p2}&\cdots&a_{pq}+b_{pq}\end{pmatrix}$$

Và tất nhiên, phép trừ ma trận hoạt động theo cùng một cách. Chỉ cần trừ các phần tử tương ứng!

Nhân ma trận

Về phép nhân ma trận! Chúng ta không nhân các ma trận giống như cách chúng ta cộng và trừ chúng. dễ nhất để giải thích bằng ví dụ sau đây:

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{pmatrix}$$

Chúng ta nhân từng phần tử trong cột đầu tiên của ma trận bên trái với phần tử trên cùng của cột đầu tiên trong ma trận bên phải, sau đó nhân cột thứ hai của ma trận bên trái với phần tử thứ hai ở cột đầu tiên của ma trận bên phải. sau đó chúng ta cộng các tích, như thế này:

$$1x_1 + 2x_2$$
$$3x_1 + 4x_2$$

Và sau đó chúng ta làm tương tự với cột thứ hai của ma trận bên phải để có được:

$$1y_1 + 2y_2$$
$$3y_1 + 4y_2$$

và kết quả cuối cùng là:

$$\begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 & 1y_1 + 2y_2 \\ 3x_1 + 4x_2 & 3y_1 + 4y_2 \end{pmatrix}$$

Trong phép nhân ma trận, đầu tiên cậu nhân và sau đó cậu cộng để có kết quả cuối cùng. hãy thử cái này đi.

Ví dụ vấn đề 1

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ thực hiện thế nào?

Chúng ta biết nhân các phần tử và sau đó cộng các số hạng để đơn giản hóa. Khi nhân, chúng ta lấy ma trận bên phải, từng cột và nhân nó với ma trận bên trái*.

Trả lời

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 4 + 2\times(-2) \\ 3\times 4 + 4\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$ **Cột thứ nhất**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 5 + 2\times 4 \\ 3\times 5 + 4\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \end{pmatrix}$$ **Cột thứ hai**

Đáp án là $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 4 & 31 \end{pmatrix}$.

* Lưu ý rằng ma trận kết quả sẽ có cùng số hàng với ma trận đầu tiên và cùng số cột với ma trận thứ hai.

Ví dụ vấn đề 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \end{pmatrix}$$ thực hiện thế nào?

Trả lời

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1+2k_2 \\ 4k_1+5k_2 \\ 7k_1+8k_2 \\ 10k_1+11k_2 \end{pmatrix}$$

Nhân cột đầu tiên của ma trận thứ hai với các hàng tương ứng của ma trận thứ nhất

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_1+2l_2 \\ 4l_1+5l_2 \\ 7l_1+8l_2 \\ 10l_1+11l_2 \end{pmatrix}$$

Làm tương tự với cột thứ hai.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m_1+2m_2 \\ 4m_1+5m_2 \\ 7m_1+8m_2 \\ 10m_1+11m_2 \end{pmatrix}$$

Và cột thứ ba.

Câu trả lời cuối cùng chỉ là sự ghép nối của ba câu trả lời trên.

$$\begin{pmatrix} k_1+2k_2 & l_1+2l_2 & m_1+2m_2 \\ 4k_1+5k_2 & 4l_1+5l_2 & 4m_1+5m_2 \\ 7k_1+8k_2 & 7l_1+8l_2 & 7m_1+8m_2 \\ 10k_1+11k_2 & 10l_1+11l_2 & 10m_1+11m_2 \end{pmatrix}$$

Biên dịch: Anh Tuấn

(Còn tiếp)