

ĐƠN VỊ ĐO LƯỜNG CỦA CÁC BIẾN

VÀ KẾT QUẢ PHÂN TÍCH HỒI QUY QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN

TS. Đặng Quảng

Kỹ thuật phân tích hồi quy quan hệ giữa các biến không đề cập đến đơn vị đo lường của các biến. Như vậy, phải chăng đơn vị đo lường không có ảnh hưởng gì đến kết quả phân tích? Bài viết này sẽ trả lời câu hỏi đặt ra.

Để cho đơn giản việc suy luận, xét trường hợp hồi quy tuyến tính. Có hai đặc tính cần được nghiên cứu là X và Y. Giả sử hai đặc tính này có phân bố chuẩn hoặc gần chuẩn. Từ tổng thể rút ngẫu nhiên ra một mẫu gồm n cá thể và thống kê lại giá trị hai đặc tính X và Y cho từng cá thể. Theo đơn vị đo lường ban đầu được dùng, nhận được tập hợp n cặp giá trị (x_{i0}, y_{i0}) i - số hiệu cá thể và $i=1,2,\dots,n$, còn 0 - đơn vị đo lường xuất phát. Dùng phương pháp bình phương tối thiểu, các hệ số của đường hồi quy tuyến tính $\hat{y}_0 = a_0x_0 + b_0$ được xác định như sau:

$$a_0 = \frac{\sum(x_{i0} - \bar{x}_0)(y_{i0} - \bar{y}_0)}{\sum(x_{i0} - \bar{x}_0)^2}, b_0 = \bar{y}_0 - a_0\bar{x}_0$$

$$\text{ở đây } \bar{x}_0 = \frac{\sum x_{i0}}{n}; \bar{y}_0 = \frac{\sum y_{i0}}{n}$$

Các trường hợp thay đổi đơn vị đo lường

1. Trường hợp 1: Chuyển đơn vị đo lường của biến X từ x_0 sang x_α với $x_\alpha = \alpha x_0$, $0 < \alpha \leq 1$. Còn đối với biến Y vẫn giữ nguyên đơn vị đo lường xuất phát y_0 . Với đơn vị đo lường mới (x_α, y_0) các hệ số của đường hồi quy mới $\hat{y}_\alpha = a_\alpha x_\alpha + b_\alpha$ được xác định như sau:

$$a_\alpha = \frac{\sum(x_{i\alpha} - \bar{x}_\alpha)(y_{i0} - \bar{y}_0)}{\sum(x_{i\alpha} - \bar{x}_\alpha)^2}$$
$$= \frac{\alpha \sum(x_{i0} - \bar{x}_0)(y_{i0} - \bar{y}_0)}{\alpha^2 \sum(x_{i0} - \bar{x}_0)^2} = \frac{1}{\alpha} a_0$$

$$\text{vậy } a_\alpha = \frac{1}{\alpha} a_0, \text{ ở đây } \bar{x}_\alpha = \frac{\sum x_{i\alpha}}{n} = \alpha \bar{x}_0$$

$$b_\alpha = \bar{y}_0 - a_\alpha \bar{x}_\alpha = \bar{y}_0 - \frac{1}{\alpha} a_0 \alpha \bar{x}_0$$
$$= \bar{y}_0 - a_0 \bar{x}_0 = b_0$$

$$\text{Vậy } b_\alpha = b_0$$

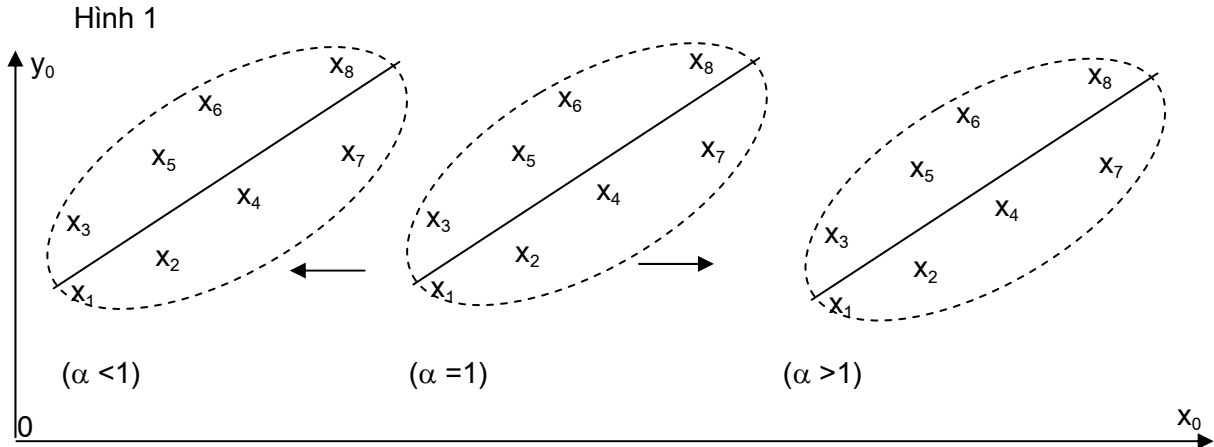
$$\hat{y}_\alpha = a_\alpha x_\alpha + b_\alpha = \frac{1}{\alpha} a_0 \alpha x_0 + b_0$$
$$= a_0 x_0 + b_0 = \hat{y}_0$$

$$\text{Vậy } \hat{y}_\alpha = \hat{y}_0$$

Tóm tắt tác động của việc thay đổi đơn vị đo lường:

$$x_0 \rightarrow x_\alpha = \alpha x_0 \text{ và } y_\alpha = y_0$$
$$\Rightarrow \hat{y}_0 \rightarrow \hat{y}_\alpha = \hat{y}_0$$

Như vậy, với trường hợp 1, số đo của biến Y được xác định ở đường hồi quy mới $\hat{y}_\alpha = a_\alpha x_\alpha + b_\alpha$ cũng giống như ở đường hồi quy xuất phát $\hat{y}_0 = a_0 x_0 + b_0$. Điều này về mặt hình học có nghĩa rằng, đường hồi quy mới chính là kết quả tịnh tiến của đường hồi quy xuất phát dọc theo trục hoành của tọa độ (x_0, y_0) với tỷ lệ tịnh tiến α . Hãy xem hình 1 để minh họa những ý đã nói trên.



2. Trường hợp 2: Chuyển đơn vị đo lường của biến Y từ y_0 sang y_β với $y_\beta = \beta y_0$, $0 < \beta < 1$. Còn đối với biến X vẫn giữ nguyên đơn vị đo lường xuất phát x_0 . Với đơn vị đo lường mới (x_0, y_β) các hệ số của đường hồi quy mới $\hat{y}_\beta = a_\beta x_\beta + b_\beta$ được xác định như sau:

$$a_\beta = \frac{\sum(x_{i0} - \bar{x}_0)(y_{i\beta} - \bar{y}_\beta)}{\sum(x_{i0} - \bar{x}_0)^2}$$

$$= \frac{\beta \sum(x_{i0} - \bar{x}_0)(y_{i0} - \bar{y}_0)}{\sum(x_{i0} - \bar{x}_0)^2} = \beta a_0$$

ở đây $\bar{y}_\beta = \frac{\sum y_{i\beta}}{n} = \beta \bar{y}_0$

Vậy $a_\beta = \beta a_0$

$$b_\beta = \bar{y}_\beta - a_\beta \bar{x}_\beta = \beta \bar{y}_0 - \beta a_0 x_0$$

$$= \beta(\bar{y}_0 - a_0 x_0) = \beta b_0$$

Vậy $b_\beta = \beta b_0$

$$\hat{y}_\beta = a_\beta x_\beta + b_\beta = \beta a_0 x_0 + \beta b_0$$

$$= \beta(a_0 x_0 + b_0) = \beta \hat{y}_0$$

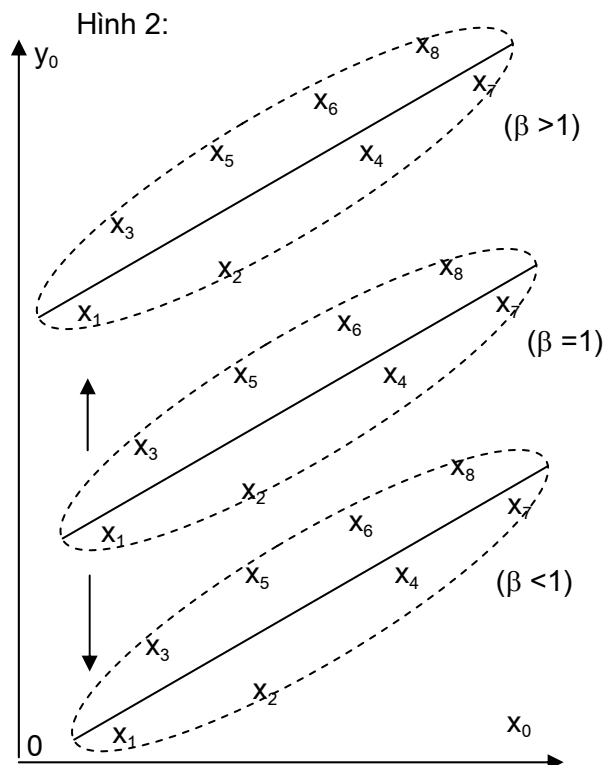
Vậy $\hat{y}_\alpha = \beta \hat{y}_0$

Tóm tắt tác động của việc thay đổi đơn vị đo lường:

$$x_\alpha = x_0 \text{ và } y_0 \rightarrow y_\beta = \beta y_0 \text{ và } \Rightarrow$$

$$\hat{y}_0 \rightarrow \hat{y}_\beta = \beta \hat{y}_0$$

Như vậy, với trường hợp 2, số đo của biến Y được xác định ở đường hồi quy mới $\hat{y}_\beta = a_\beta x_\beta + b_\beta$ bằng β lần so với ở đường hồi quy xuất phát $\hat{y}_0 = a_0 x_0 + b_0$. Điều này về mặt hình học có nghĩa rằng, đường hồi quy mới chính là kết quả tịnh tiến của đường hồi quy xuất phát theo trục tung của tọa độ (x_0, y_0) với tỷ lệ tịnh tiến β . Hãy xem hình 2 minh họa những ý đã nói trên.



3. Trường hợp 3: Đối với cả hai biến X và Y, đơn vị đo lường xuất phát (x_0, y_0) chuyển sang đơn vị đo lường mới (x_λ, y_λ) với cùng tỷ lệ chuyển λ ; $0 < \lambda \leq 1$, tức là $x_0 \rightarrow x_\lambda = \lambda x_0$; $y_0 \rightarrow y_\lambda = \lambda y_0$. Với đơn vị đo lường mới (x_λ, y_λ) các hệ số của đường hồi quy mới $\hat{y}_\lambda = a_\lambda x_\lambda + b_\lambda$ được xác định như sau:

$$a_\lambda = \frac{\sum(x_{i\lambda} - \bar{x}_\lambda)(y_{i\lambda} - \bar{y}_\lambda)}{\sum(x_{i\lambda} - \bar{x}_\lambda)^2}$$

$$= \frac{\lambda^2 \sum(x_{i0} - \bar{x}_0)(y_{i0} - \bar{y}_0)}{\lambda^2 \sum(x_{i0} - \bar{x}_0)^2} = a_0,$$

ở đây $\bar{x}_\lambda = \frac{\sum x_{i\lambda}}{n} = \lambda \bar{x}_0$, $\bar{y}_\lambda = \frac{\sum y_{i\lambda}}{n} = \lambda \bar{y}_0$

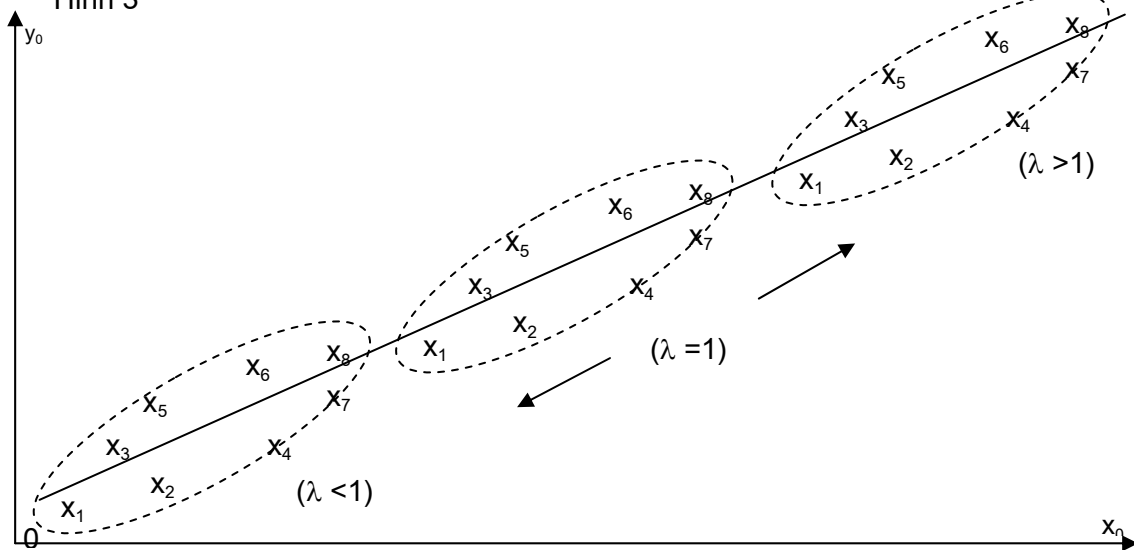
Vậy $a_\lambda = a_0$

$$b_\lambda = \bar{y}_\lambda - a_\lambda \bar{x}_\lambda = \lambda \bar{y}_0 - a_0 \lambda \bar{x}_0$$

$$= \lambda(\bar{y}_0 - a_0 \bar{x}_0) = \lambda b_0$$

Vậy $b_\lambda = \lambda b_0$

Hình 3



4. Trường hợp 4: Đối với cả hai biến X và Y, đơn vị đo lường xuất phát (x_0, y_0) chuyển sang đơn vị đo lường mới (x_α, y_β) với tỷ lệ chuyển tương ứng α, β tức là $x_0 \rightarrow x_\alpha = \alpha x_0$; $y_0 \rightarrow y_\beta = \beta y_0$, $\alpha \neq \beta$. Với đơn vị đo lường mới

(x_α, y_β) các hệ số của đường hồi quy mới $\hat{y}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}$ được xác định như sau:

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\sum(x_{i\alpha} - \bar{x}_\alpha)(y_{i\beta} - \bar{y}_\beta)}{\sum(x_{i\alpha} - \bar{x}_\alpha)^2}$$

$$\hat{y}_\lambda = a_\lambda x_\lambda + b_\lambda = a_0 \lambda x_0 + \lambda b_0$$

$$= \lambda(a_0 x_0 + b_0) = \lambda \hat{y}_0$$

Vậy $\hat{y}_\alpha = \lambda \hat{y}_0$

Tóm tắt tác động của việc thay đổi đơn vị đo lường:

$$x_0 \rightarrow x_\lambda = \lambda x_0 \text{ và } y_0 \rightarrow y_\lambda = \lambda y_0 \text{ và}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_0 \rightarrow \hat{y}_\lambda = \lambda \hat{y}_0$$

Như vậy, với trường hợp 3, số đo của biến Y được xác định ở đường hồi quy mới $\hat{y}_\lambda = a_\lambda x_\lambda + b_\lambda$ bằng λ lần so với ở đường hồi quy xuất phát $\hat{y}_0 = a_0 x_0 + b_0$. Điều này về mặt hình học có nghĩa rằng, đoạn hồi quy mới chính là kết quả tịnh tiến dọc theo đường hồi quy có chứa đoạn hồi quy xuất phát với tỷ lệ tịnh tiến là λ . Hãy xem hình 3 để minh họa những ý đã nói trên.

$$= \frac{\alpha\beta \sum (x_{i0} - \bar{x}_\alpha)(y_{i0} - \bar{y}_0)}{\alpha^2 \sum (x_{i0} - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\beta}{\alpha} a_0, \text{ vậy } a_{\alpha\beta} = \frac{\beta}{\alpha} a_0$$

$$b_{\alpha\beta} = \bar{y}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} \bar{x}_{\alpha\beta} = \beta \bar{y}_0 - \frac{\beta}{\alpha} a_0 \alpha \bar{x}_0$$

$$= \beta \bar{y}_0 - \beta a_0 \bar{x}_0 = \beta (\bar{y}_0 - a_0 \bar{x}_0) = \beta b_0$$

Vậy $b_{\alpha\beta} = \beta b_0$

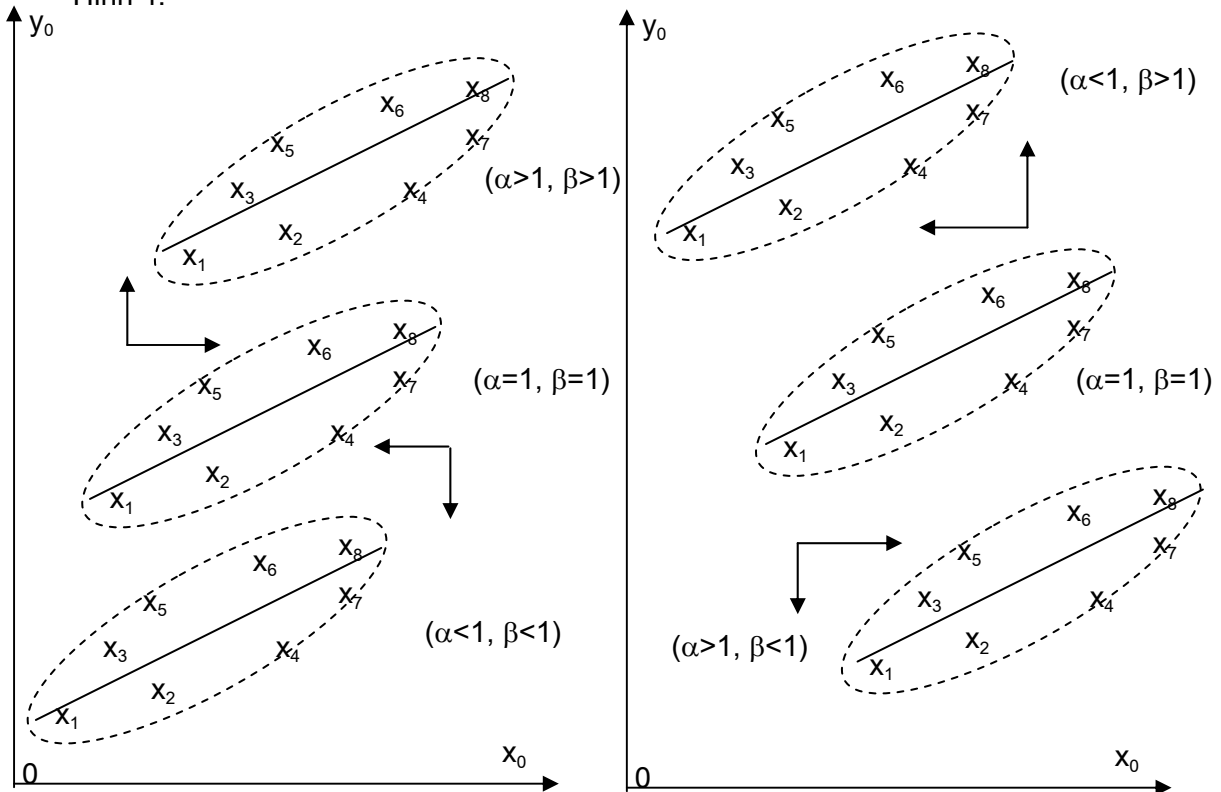
$$\hat{y}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} = \frac{\beta}{\alpha} a_0 \alpha x_0 + \beta b_0$$

$$= \beta a_0 x_0 + \beta b_0 = \beta (a_0 x_0 + b_0) = \beta \hat{y}_0$$

Vậy $\hat{y}_{\alpha\beta} = \beta \hat{y}_0$

Tóm tắt tác động của việc thay đổi đơn vị đo lường:

Hình 4:



$$x_0 \rightarrow x_\alpha = \alpha x_0 \text{ và } y_0 \rightarrow y_\beta = \beta y_0 \Rightarrow$$

$$\hat{y}_0 \rightarrow \hat{y}_{\alpha\beta} = \beta \hat{y}_0$$

Như vậy, với trường hợp 4, số đo của biến Y được xác định ở đường hồi quy mới $\hat{y}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}$ bằng β lần so với ở đường hồi quy xuất phát $\hat{y}_0 = a_0 x_0 + b_0$. Điều này về mặt hình học có nghĩa rằng, đường hồi quy mới chính là kết quả tịnh tiến của đường hồi quy xuất phát vừa dọc theo trục hoành vừa dọc theo trục tung của tọa độ (x_0, y_0) với tỷ lệ tịnh tiến tương ứng là α, β . Hãy xem hình 4 để minh họa những ý đã nói trên.

5. Kết luận chung: Với bốn trường hợp đã xét, các đường hồi quy đều có cùng độ nghiêng với đường hồi quy xuất phát. Như

vậy về bản chất, đơn vị đo lường không có ảnh hưởng gì đến kết quả phân tích hồi quy quan hệ giữa các biến ■